Théorème de Gauss-Lucas (102, 144, 181)

FGN Algèbre 1 p. 229

thm : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On a $\quad Rac_{\mathbb{C}}(P') \subset Conv(Rac_{\mathbb{C}}(P))$.

démo : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. D'après le thm de d'Alembert-Gauss, on a :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*, r \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes deux à deux de P et $m_1, \dots, m_r$ leur multiplicités respectives.

Comme $P'(X) = \lambda \sum_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i-1} m_i \prod_{l \neq i} (X-\lambda_l)^{m_l}$, la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ s'écrit :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-\lambda_i}$$

Soit z une racine de P'.

* Si z est l'une des racines λ_i de P, alors il est clair que $z \in Conv(Rac_{\mathbb{C}}(P))$.
* Sinon, on peut écrire : $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{z-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\overline{z-\lambda_i}}{|z-\lambda_i|^2}$

En passant au conjugué, on a $\quad 0 = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{z-\lambda_i}{|z-\lambda_i|^2}$

Donc $\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|z-\lambda_i|^2} z = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i \lambda_i}{|z-\lambda_i|^2}$ d'où $z = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i \lambda_i}{|z-\lambda_i|^2}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|z-\lambda_i|^2}}$ puisque $\forall i \in [\![1,r]\!]\ \frac{m_i}{|z-\lambda_i|^2} > 0$

Cette formule exprime le fait que z est un barycentre à coefficients positifs de λ_k.

Ainsi $Rac_{\mathbb{C}}(P') \subset Conv(Rac_{\mathbb{C}}(P))$

appli : Déterminer le plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $P_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.

démo :

* Pour $n=2$, $P_2(X) = 2X$ donc 0 est la seule racine
* Pour $n \geq 3$, on a $P_n'(X) = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$ qui est un polynôme de degré $n-2$.

Soit z une racine de P_n'. On remarque z ne peut pas être nul et donc on a

$P'(z) = 0$ ssi $n(z+1)^{n-1} - n z^{n-1} = 0$ ssi $\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1$.

Donc il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$

On remarque $k \neq 0$ car sinon $z+1 = z$. Ainsi les $n-2$ racines de P_n' sont les nombres complexes pour $k \in [\![1, n-2]\!]$,

$$z_k = \left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right) - 1\right)^{-1} = \frac{\exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right)\exp\left(\frac{-ik\pi}{n-1}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right)\left[\exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right) - \exp\left(\frac{-ik\pi}{n-1}\right)\right]}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{-ik\pi}{n-1}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$$

$z+1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right) z$

$1 = \left(\exp\left(\frac{2i\pi k}{n-1}\right) - 1\right) z$

$\Rightarrow z = \left(\exp \frac{2i\pi k}{n-1} - 1\right)^{-1}$

Si toutes les racines de P_n sont de module 1, les racines de P_n' sont nécessairement dans le disque unité par le thm de Gauss-Lucas.

Or $|z_1| = \left|\frac{\exp\left(\frac{-i\pi}{n-1}\right)}{2i\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}\right| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} > 0$ et pour $n \geqslant 8$, on a $\frac{\pi}{n-1} < \frac{\pi}{6}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

D'où $|z_1| > \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 1$. Donc un entier $n \geqslant 8$ ne convient pas.

Regardons $P_7 = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On a 0 et -1 qui sont racines évidentes donc :

$$P_7(X) = X(X+1)\,Q(X) \quad \text{avec } Q(X) = 7(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$$

Montrons que $Q(X)$ s'écrit sous la forme $X^2 R\left(X + \frac{1}{X}\right)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$.

En posant $Y = X + \frac{1}{X}$ on a $Y^2 = \left(X + \frac{1}{X}\right)^2 = X^2 + 2X.\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} = X^2 + \frac{1}{X^2} + 2$

$$Q(X) = 7X^2\left(X^2 + 2X + 3 + 2.\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}\right) = 7X^2\left(\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right)$$

$$= 7X^2\left((Y^2 - 2) + 2Y + 3\right) = 7X^2(Y+1)^2$$

car on veut $Y+1 = 0$ ie $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$

Si z est une racine de P_7 non nulle et différente de -1, alors z vérifie $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$ ie $z^2 + z + 1 = 0$.

Donc $z = j$ ou $z = j^2$. Ainsi $\mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(P_7) = \{0, -1, j, j^2\} \subset B(0,1)$

Ainsi l'entier 7 convient et c'est le plus grand vérifiant la propriété demandée.